www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°86-228 du 28 juillet 1986.

Notations et objectif

Un entier p étant *donné*, strictement supérieur à l'unité, on considère l'espace préhilbertien complexe $\mathbf{C}^p$ où le produit hermitien et la norme hermitienne associés sont définis respectivement par :

$$(x/y) = \sum_{i=1}^{i=p} \overline{x}_i\, y_i \qquad \text{et} \qquad |x|_* = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2}$$

(fixe $\|\ \|_*$)

L'espace vectoriel réel $\mathbf{R}^p$ est muni de la structure euclidienne induite. On désigne par $B = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base canonique de l'un quelconque de ces espaces, $\mathfrak{L}(K^p)$ l'ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel K^p sur le corps K et $M_p(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans le corps K. On munit $\mathfrak{L}(\mathbf{C}^p)$ (respectivement $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^p)$) de la norme définie par $|X| = \text{Sup}\ \{\ |X(x)|_*,\ |x|_* \le 1\ \}$. Par identification de $\mathfrak{L}(\mathbf{C}^p)$ à $M_p(\mathbf{C})$ (respectivement de $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^p)$ à $M_p(\mathbf{R})$), on définit une norme sur $M_p(\mathbf{C})$ (respectivement sur $M_p(\mathbf{R})$), en posant, pour toute matrice M, $|M| = |\phi|$ où ϕ est l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est M.

On notera I_p la matrice identité de $\mathbf{C}^p$ ou de $\mathbf{R}^p$. La première partie est consacrée à l'étude de l'application $t \to \exp(t\,M)$ où M est une matrice donnée de $M_p(\mathbf{C})$. Dans la deuxième partie, on étudie dans $M_3(\mathbf{R})$ l'application $t \to \exp(t\,A)$ où A est une matrice réelle antisymétrique, ce qui fournit une correspondance entre les matrices antisymétriques et les matrices de rotation. Enfin, dans la troisième partie, on étudie dans $M_3(\mathbf{C})$ l'application $z \to \exp(z\,A)$ pour la même matrice A (z étant dans $\mathbf{C}$).

On admettra que si B(t) et C(t) appartiennent à $M_p(K)$ alors :

$$\frac{d}{dt}[B(t)\,C(t)] = \frac{d}{dt}[B(t)]\,C(t) + B(t)\,\frac{d}{dt}[C(t)]$$

PARTIE I

ETUDE DE L'EXPONENTIELLE DE MATRICE

1°) Etude de fonctions définies par des séries de matrices

Soit (M_n) une suite d'éléments de $M_p(\mathbf{C})$ vérifiant la condition suivante (1) :

(1) $\begin{cases} \text{Il existe deux nombres réels positifs k et } \rho \text{ tels que, pour tout entier n positif, on ait :} \\ |M_n| \le k\,\rho^n \end{cases}$

a) Montrer que, pour tout nombre réel t, la série de matrices $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} M_n$ est absolument convergente. On définit alors l'application S qui à tout nombre réel t fait correspondre la matrice $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} M_n$.

b) Prouver que S est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et que l'on peut dériver terme à terme la série définissant S(t). (On se ramènera au cas de séries entières à coefficients complexes).

Tournez la page S.V.P.

2°) Définition et propriétés de exp(t M)

Soit maintenant M un élément de $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$. On pose $E(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} M^n$ pour tout nombre réel t.

a) Montrer que la suite (M^n) des puissances de M vérifie la condition (1). En déduire que l'application E est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et prouver qu'elle satisfait aux conditions suivantes :

$$(2)\ \begin{cases} E(0) = I_p \text{ et quel que soit le nombre réel t, } E'(t) = M\,E(t), \\ E' \text{ est la dérivée de E} \end{cases}$$

b) Prouver que, pour tout nombre réel t, $E(t)\,E(-t) = E(-t)\,E(t) = I_p$.

On pourra établir que $M\,E(t) = E(t)\,M$ pour tout réel t puis dériver la fonction $t \to E(t)\,E(-t)$.

c) Montrer que E est la seule application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ satisfaisant aux conditions (2). Pour celà, F étant une application satisfaisant aux conditions (2), on dérivera la fonction $t \to E(-t)F(t)$.

d) Prouver que, pour tout couple (s,t) de nombres réels, $E(t+s) = E(t)\,E(s)$.

A cet effet, s étant un nombre réel fixé, on prouvera que l'application $t \to E(t+s)E(-s)$ satisfait aux conditions (2).

Dans la suite du problème, on pose : $\exp(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!} = E(1)$

donc, pour tout nombre réel t, $E(t) = \exp(t\,M)$ et, pour tout nombre complexe z, $\exp(z\,M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} M^n$.

3°) Propriété de l'application exp.

Soient A et B deux matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ telles que $AB = BA$.

a) Montrer que $(\exp A)\,B = B\,(\exp A)$.

b) Etablir que $\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$.

A cet effet, on considèrera les fonctions F et G de la variable réelle t définies par

$F(t) = \exp[t\,(A + B)]$

$G(t) = \exp(t\,A)\,\exp(t\,B)$

et on prouvera que F et G satisfont à une même équation différentielle.

4°) Propriété du déterminant de exp M

a) Soit P une matrice inversible de $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$, prouver que, pour toute matrice M de $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$,

$$\exp(P\,M\,P^{-1}) = P\,(\exp M)\,P^{-1}.$$

b) Montrer que si T est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, la matrice exp T est encore triangulaire supérieure et déterminer ses éléments diagonaux.

c) En déduire alors, pour tout élément M de $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$, la relation liant la trace de M et le déterminant de exp M.

5°) Exponentielle d'une matrice antisymétrique

a) Pour tout élément M de $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$, on note ${}^tM$ la transposée de M, montrer que $\exp({}^tM) = {}^t(\exp M)$.

b) Prouver que, si la matrice A est antisymétrique, pour tout nombre réel s la matrice $U = \exp(s\,A)$ vérifie les relations :

$$U\,{}^tU = I_p \quad \text{et} \quad \det U = 1.$$

Que peut-on en déduire si U est réelle ?

Tournez la page

6°) Propriété topologique de exp

La matrice M étant donnée non nulle, on note $\mathbf{C}[M]$ la sous-algèbre unitaire de $M_p(\mathbf{C})$ engendrée par M. On rappelle que cette sous-algèbre est constituée des matrices de la forme Q(M) où Q est un polynôme arbitraire de $\mathbf{C}[X]$.

a) Exhiber une partie génératrice de $\mathbf{C}[M]$.

b) Prouver que $\mathbf{C}[M]$ est une partie fermée de $M_p(\mathbf{C})$ et en déduire que exp (t M) est un élément de $\mathbf{C}[M]$ quel que soit le nombre réel t.

PARTIE II

Dans cette partie, on considère l'espace *réel* euclidien $\mathbf{R}^3$ (p = 3), le produit scalaire et la norme associée étant définis dans les préliminaires. La base canonique est notée $B = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathbf{R}^3$ est supposé orienté par le choix de cette base. On suppose donné un vecteur unitaire $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathbf{R}^3$ et on désigne par W le plan orthogonal à ce vecteur ω, orienté par la donnée du vecteur normal ω ;
ainsi $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}\,\omega \oplus W$, cette somme directe étant orthogonale. On note f et g les deux endomorphismes de $\mathbf{R}^3$, associés au vecteur ω, définis par :

$$\begin{cases} f(x) = \omega \wedge x \\ g(x) = (\omega/x)\,\omega \end{cases}$$

(le symbole $\wedge$ étant celui du produit vectoriel dans l'espace orienté $\mathbf{R}^3$).

1°) Etude de l'endomorphisme g

a) Montrer que g est un projecteur orthogonal dont on précisera l'image et le noyau.

b) Caractériser géométriquement l'endomorphisme $Id_{\mathbf{R}^3} - g$.

c) Déduire de ce qui précède, pour n entier positif, les puissances successives g^n et $(Id_{\mathbf{R}^3} - g)^n$ à l'aide de g et de $Id_{\mathbf{R}^3}$.

2°) Etude de l'endomorphisme f

a) Prouver que f est un endomorphisme antisymétrique. Déterminer son noyau et son image. En déduire f o g et g o f.

b) Prouver que W est stable par f et montrer que l'endomorphisme r de W induit par f est le quart de tour direct (c'est-à-dire la rotation plane dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$).

c) Exprimer f(x) et g(x) lorsque x, élément de $\mathbf{R}^3$, est écrit sous forme $x = \lambda\,\omega + y$ où λ est un réel et y un vecteur de W. En utilisant la caractérisation de l'endomorphisme r^2, déduire de ce qui précède que $f^2 = g - Id_{\mathbf{R}^3}$.

d) Exprimer, pour tout entier n strictement positif, l'endomorphisme f^n à l'aide de f ou de f^2 (on distinguera les cas n pair et n impair).

3°) Matrices associées à f et à g

a) Expliciter les matrices A et B associées respectivement à f et à g dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

b) Calculer les transposées ${}^tA$, ${}^tB$ ainsi que les produits AB et BA. Traduire matriciellement les relations obtenues dans les questions 1°c et 2°d.

c) Soient deux vecteurs ε_1 et ε_2 de W, tels que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega)$ constitue une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans cette base et en déduire le polynôme caractéristique de f.

4°) Base de l'algèbre $\mathbf{C}[A]$

Montrer que (I_3, A, A^2) est libre et en déduire que (I_3, A, A^2) est une base de l'espace vectoriel $\mathbf{C}[A]$

Tournez la page S.V.P.

5°) Correspondance entre les matrices antisymétriques et les matrices de rotation

a) Montrer que exp (t A)$\in \mathbf{C}$ [A] et exprimer exp (t A) dans la base (I_3, A, A^2).

b) A étant toujours associée au vecteur ω fixé dans $\mathbf{R}^3$ et t étant un nombre réel fixé, on désigne par u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est U = exp (t A). Prouver que la droite $\mathbf{R}\,\omega$ est invariante par u, que W est stable par u et que l'endomorphisme induit dans ce plan par u est la rotation r_t dont une mesure de l'angle est le nombre réel t. En déduire la nature géométrique de u.

c) Inversement on considère un élément R de SO_3 (R), c'est-à-dire une matrice de rotation ; on suppose R $\neq I_3$. Montrer qu'il existe un couple (t , ω) constitué d'un nombre réel t strictement positif et d'un vecteur unitaire ω de $\mathbf{R}^3$ tel que R = exp (t A) où A est la matrice associée à l'application linéaire $x \to \omega \wedge x$. Soit un autre couple (t', ω') où t' est un nombre réel et ω' un vecteur unitaire, tel que R = exp (t' A') où A' est associée à ω'. Montrer que nécessairement $\omega' = \pm \omega$. Préciser selon les cas comment le couple (t', A') se déduit du couple (t , A) précédent.

d) Soit j l'application qui à toute matrice H de χ (sous-espace vectoriel des matrices de $M_3(\mathbf{R})$ qui sont antisymétriques) fait correspondre exp (H) dans l'espace SO_3 (R). Etudier la surjectivité et l'injectivité de j.

PARTIE III

Cette partie III conserve les définitions des matrices A et B associées au vecteur unitaire $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathbf{C}^3$ dont les coordonnées α, β, γ sont réelles. On note maintenant, $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ les endomorphismes de $\mathbf{C}^3$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbf{C}^3$ sont respectivement A et B. On pose $\mathbf{C}^3 = \tilde{P} \oplus \mathbf{C}\,\omega$ où $\tilde{P}$ est l'orthogonal, dans $\mathbf{C}^3$ de $\mathbf{C}\,\omega$. On se propose d'étudier l'image de l'application qui à tout z complexe fait correspondre exp (z A).

1°) Etude de $\tilde{g}$ Donner la nature géométrique de l'endomorphisme $\tilde{g}$.

2°) Etude de $\tilde{f}$

a) En utilisant II.3°c, montrer que les valeurs propres de $\tilde{f}$ sont 0, i, -i et que $\mathbf{C}\,\omega$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre nulle.

b) Montrer que, pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbf{C}^3$ ($\tilde{f}$ (x)/y) = - (x/ $\tilde{f}$(y)). En déduire que si v_1 et v_2 sont deux vecteurs propres de $\tilde{f}$ associés à i et -i, $\tilde{P}$ est la somme directe de $\mathbf{C}\,v_1$ et $\mathbf{C}\,v_2$ (on ne cherchera pas à expliciter v_1 et v_2).

c) Expliciter la matrice D de $\tilde{f}$ dans la base (v_1, v_2, ω).

3°) Etude de exp (z A)

a) Calculer exp (z D) et en déduire les valeurs propres de exp (z D).

b) En déduire les composantes, exprimées à l'aide du nombre complexe z, de exp (z A) dans la base (I_3, A, A^2) de l'algèbre $\mathbf{C}$ [A].

4°) Image de l'application $z \mapsto$ exp (z A)

a) Soit M un élément de $\mathbf{C}$ [A] tel que ${}^tM\,M = I_3$. En utilisant l'écriture de M dans la base (I_3, A, A^2), montrer qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ et un nombre complexe z tel que $M = \varepsilon I_3 + \sin z\, A + (\varepsilon - \cos z)\, A^2$.

b) Soit $\tilde{R}_A$ l'ensemble des matrices M de $\mathbf{C}$ [A] vérifiant ${}^tM\,M = I_3$ et det M = 1. Comparer $\tilde{R}_A$ à l'image de l'application $z \mapsto$ exp (z A).

Fin de l'énoncé

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail